

RIPARTIZIONE FORZE SISMICHE

METODO DELLE RIGIDEZZE

Corso di Progettazione Strutturale B
a.a. 2014/2015 prof. Ginevra Salerno

Commento alla quinta esercitazione
redatto da Maria Luisa Regalo

L'obiettivo della quinta esercitazione è quello di calcolare come viene ripartita una forza orizzontale, come ad esempio quella sismica o quella del vento, sui diversi telai che compongono una struttura, applicando il metodo delle rigidezze. Per poter affrontare questa esercitazione sono necessarie delle conoscenze che si possono acquisire studiando la dispensa *"sul concetto di rigidezza e sul metodo"*, che si trova nella sezione *Download* del Portale di Meccanica.

Dopo aver studiato la dispensa, prenderemo in considerazione un generico edificio ad un solo piano, con il solaio abbastanza rigido nel suo piano (la rigidezza in piano di un solaio è sempre molto più elevata della sua rigidezza fuori dal piano, ossia flessionale), la cui struttura è composta da telai piani, ossia da un insieme di travi e pilastri allineati sopra un piano verticale. Questi elementi strutturali, se opportunamente progettati, oltre a trasmettere i carichi verticali alle fondazioni, possono svolgere il ruolo di controventi poiché sono in grado di sopportare anche le azioni orizzontali. Bisogna premettere che questa esercitazione è dedicata ad una specifica tecnologia (cemento armato) ed a una specifica tipologia di controventi, ossia i telai Shear-Type: l'esercitazione viene effettuata tramite il foglio excel: *"ripartizione_forze_sismiche.xls"*, che troverete nella sezione *Download* del Portale di Meccanica. Utilizzare questo foglio per altre tecnologie/tipologie, diverse da un edificio a telai Shear-Type, è possibile a patto di effettuare delle modifiche nella parte riguardante la rigidezza dei controventi.

Il foglio di calcolo è articolato in sette passaggi, per giungere a determinare la reazione elastica di ogni controvento, che è eguale ed opposta alla forza orizzontale che tramite il solaio viene attribuita al singolo controvento.

La prima cosa da fare è disegnare la pianta strutturale dell'edificio preso come riferimento ed individuare i telai che compongono la struttura.

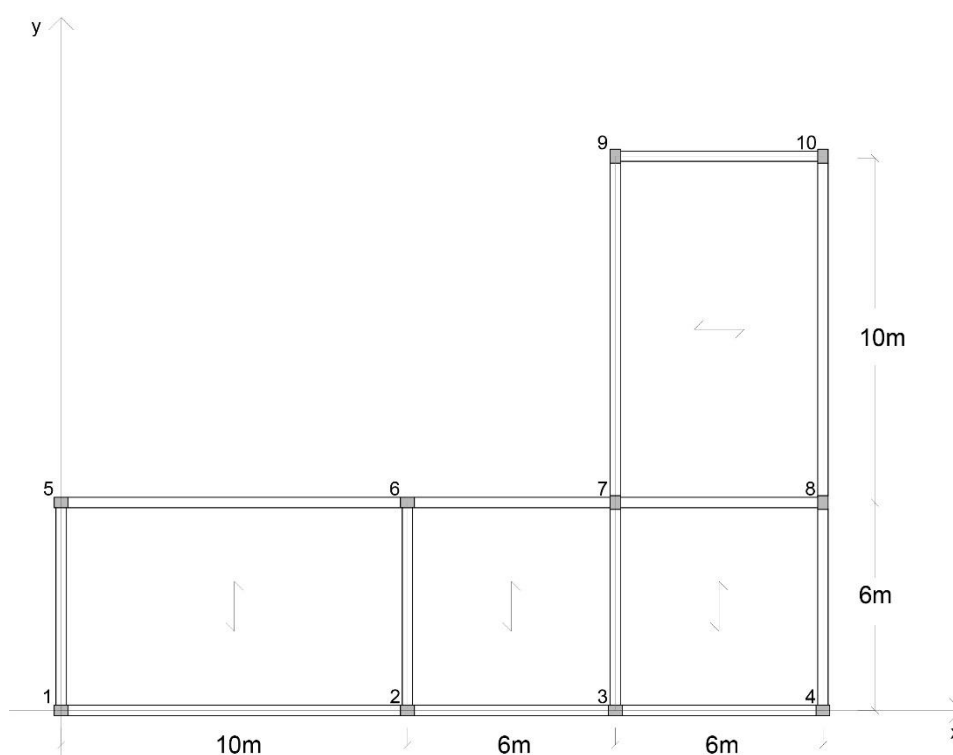


FIG.01

Nell'esempio riportato in FIG.01 si possono individuare sette telai, quattro paralleli all'asse y e tre paralleli all'asse x:

Telaio 1v	composto da:	Pilastri 1 e 5
Telaio 2v	composto da:	Pilastri 2 e 6
Telaio 3v	composto da:	Pilastri 3, 7 e 9
Telaio 4v	composto da:	Pilastri 4, 8 e 10
Telaio 1o	composto da:	Pilastri 1, 2, 3 e 4
Telaio 2o	composto da:	Pilastri 5, 6, 7 e 8
Telaio 3o	composto da:	Pilastri 9 e 10

I controventi, che per il solaio rappresentano vincoli cedevoli elasticamente, possono essere schematizzati nel piano dell'impalcato come molle, aventi un'adeguata rigidezza (FIG.02).

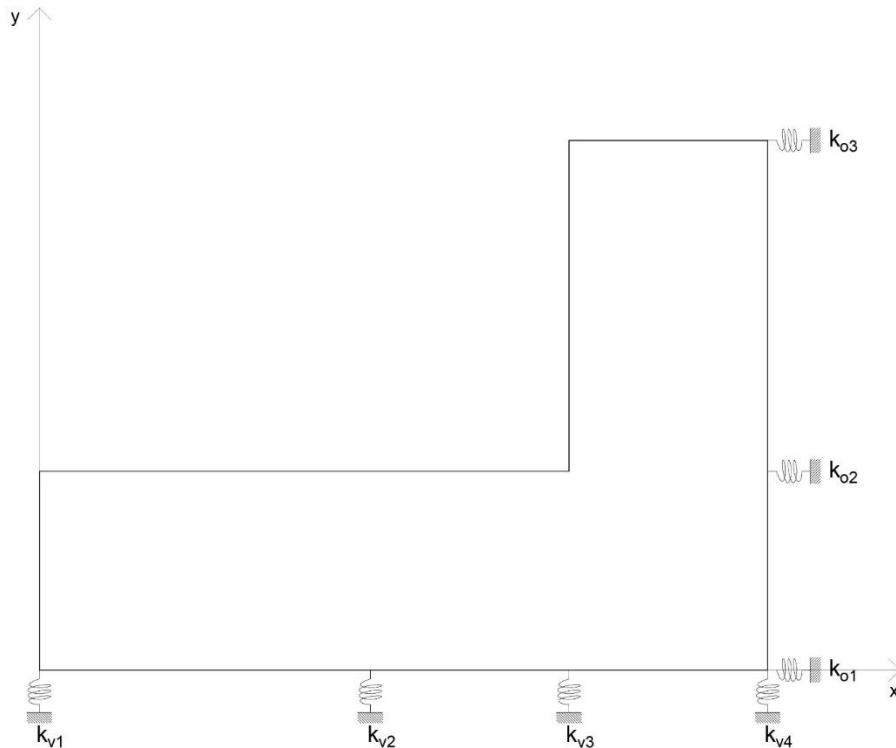


FIG.02

Nello **STEP 1** del file excel viene calcolata la rigidezza traslante associata a tutti i controventi (FIG.03).

Step 1: calcolo delle rigidzze traslanti dei controventi dell'edificio					
Telaio 1v	1-5	pilastri che individuano il telaio		Telaio 1o	1-2-3-4 pilastri che individuano il telaio
E (N/mmq)	21000,00	modulo di Young		E	21000,00 modulo di Young
H (m)	3,20	altezza dei pilastri		H	3,20 altezza dei pilastri
I 1 (cm^4)	20000,00	momento d'inerzia pilastro 1		I 1	90000,00 momento d'inerzia pilastro 1
I 2	20000,00	momento d'inerzia pilastro 2		I 2	90000,00 momento d'inerzia pilastro 2
I 3	0,00	momento d'inerzia pilastro 3		I 3	90000,00 momento d'inerzia pilastro 3
I 4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4		I 4	90000,00 momento d'inerzia pilastro 4
K T (KN/m)	3076,17	rigidezza traslante telaio 1		K T	27685,55 rigidezza traslante telaio 5
Telaio 2v	2-6	pilastri che individuano il telaio		Telaio 2o	5-6-7-8 pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young		E	21000,00 modulo di Young
H	3,20	altezza dei pilastri		H	3,20 altezza dei pilastri
I 1	20000,00	momento d'inerzia pilastro 1		I 1	20000,00 momento d'inerzia pilastro 1
I 2	20000,00	momento d'inerzia pilastro 2		I 2	20000,00 momento d'inerzia pilastro 2
I 3	0,00	momento d'inerzia pilastro 3		I 3	90000,00 momento d'inerzia pilastro 3
I 4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4		I 4	90000,00 momento d'inerzia pilastro 4
K T	3076,17	rigidezza traslante telaio 2		K T	16918,95 rigidezza traslante telaio 6

Telaio 3v	3-7-9	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,20	altezza dei pilastri
I 1	20000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I 2	90000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I 3	90000,00	momento d'inerzia pilastro 3
I 4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K T	15380,86	rigidezza traslante telaio 3
Telaio 4v	4-8-10	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,20	altezza dei pilastri
I 1	20000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I 2	90000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I 3	90000,00	momento d'inerzia pilastro 3
I 4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K T	15380,86	rigidezza traslante telaio 4

Telaio 3o	9-10	pilastri che individuano il telaio
E	21000,00	modulo di Young
H	3,20	altezza dei pilastri
I 1	20000,00	momento d'inerzia pilastro 1
I 2	20000,00	momento d'inerzia pilastro 2
I 3	0,00	momento d'inerzia pilastro 3
I 4	0,00	momento d'inerzia pilastro 4
K T	3076,17	rigidezza traslante telaio 7

FIG.03

Poiché i telai sono modellati come telai Shear-Type (FIG.04), possiamo ricavare la loro rigidezza come segue:

$$F = \left(\frac{12EI_1}{h^3} + \frac{12EI_2}{h^3} \right) \delta \quad (1)$$

$$F = k \cdot \delta \quad (2)$$

$$k = \frac{12EI_1}{h^3} + \frac{12EI_2}{h^3} \quad (3)$$

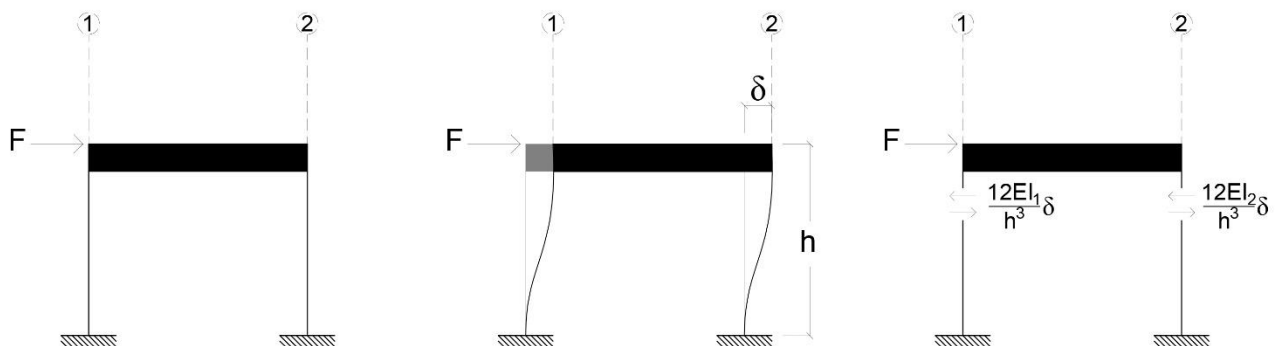


FIG.04

Nel caso in cui un controvento abbia quattro pilastri, la (3) diventa:

$$k = \frac{12E}{h^3} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \quad (4)$$

Quindi generalizzando, possiamo dire che la rigidezza traslante di un telaio Shear-Type composto da n pilastri è pari a:

$$k = \frac{12E}{h^3} \sum_{i=1}^n I_i \quad (5)$$

Nello **STEP 2** abbiamo una tabella riassuntiva (FIG.05), in cui vengono riportare le rigidezze di tutti i controventi, orizzontali e verticali, calcolate nel primo step.

Step 2: tabella sinottica controventi e distanze		
Kv1(KN/m)	3076,17	rigidezza traslante contr.vert. 1
Kv2	3076,17	rigidezza traslante contr.vert. 2
Kv3	15380,86	rigidezza traslante contr.vert. 3
Kv4	15380,86	rigidezza traslante contr.vert. 4
dv2 (m)	10,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv3	16,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv4	22,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
Ko1(KN/m)	27685,55	rigidezza traslante contr.orizz. 1
Ko2	16918,95	rigidezza traslante contr.orizz. 2
Ko3	3076,17	rigidezza traslante contr.orizz. 3
do2	6,00	distanza verticale controvento punto O
do3	16,00	distanza verticale controvento punto O

FIG.05

Sempre in questa tabella vengono riportate anche le distanze dei diversi controventi dal punto O (FIG.06), origine di un sistema di riferimento scelto da noi (FIG.07).

Step 2: tabella sinottica controventi e distanze		
Kv1(KN/m)	3076,17	rigidezza traslante contr.vert. 1
Kv2	3076,17	rigidezza traslante contr.vert. 2
Kv3	15380,86	rigidezza traslante contr.vert. 3
Kv4	15380,86	rigidezza traslante contr.vert. 4
dv2 (m)	10,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv3	16,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
dv4	22,00	distanza orizzontale controvento dal punto O
Ko1(KN/m)	27685,55	rigidezza traslante contr.orizz. 1
Ko2	16918,95	rigidezza traslante contr.orizz. 2
Ko3	3076,17	rigidezza traslante contr.orizz. 3
do2	6,00	distanza verticale controvento punto O
do3	16,00	distanza verticale controvento punto O

FIG.06

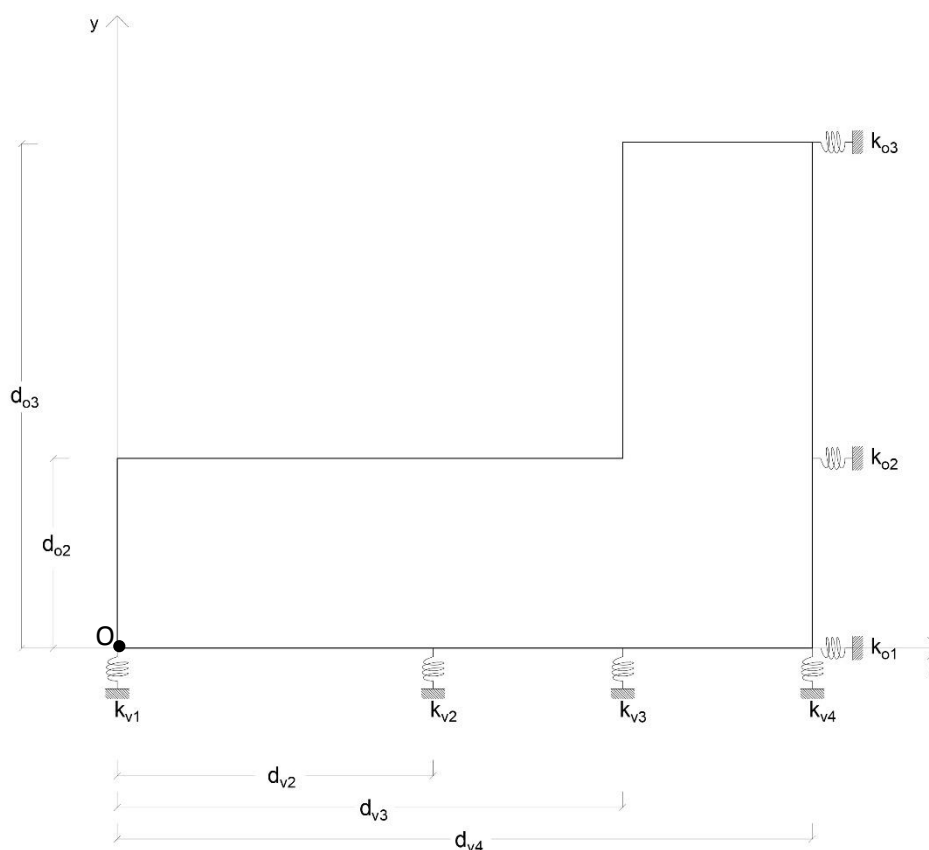


FIG.07

Lo **STEP 3** serve per calcolare il centro di massa dell'impalcato (**FIG.08**).

Step 3: calcolo del centro di massa		
area 1 (mq)	132,00	misura dell'area superficie 1 area 1 (misura)
x G1 (m)	11,00	coordinata X centro area 1
y G1	3,00	coordinata Y centro area 1
area 2	60,00	misura dell'area superficie 2
x G2	19,00	coordinata X centro area 2
y G2	11,00	coordinata Y centro area 2
Area tot (mq)	192,00	Area totale impalcato
X G	13,50	coordinata X centro d'area impalcato (centro massa)
Y G	5,50	coordinata Y centro d'area impalcato (centro massa)

FIG.08

Poiché si tratta di una forma “complessa”, ricavare il centro di massa non è un’operazione immediata, quindi suddividiamo l’impalcato in figure elementari, come il rettangolo, ed indichiamo i centri di massa e l’area di ognuna di queste figure (**FIG.09**).

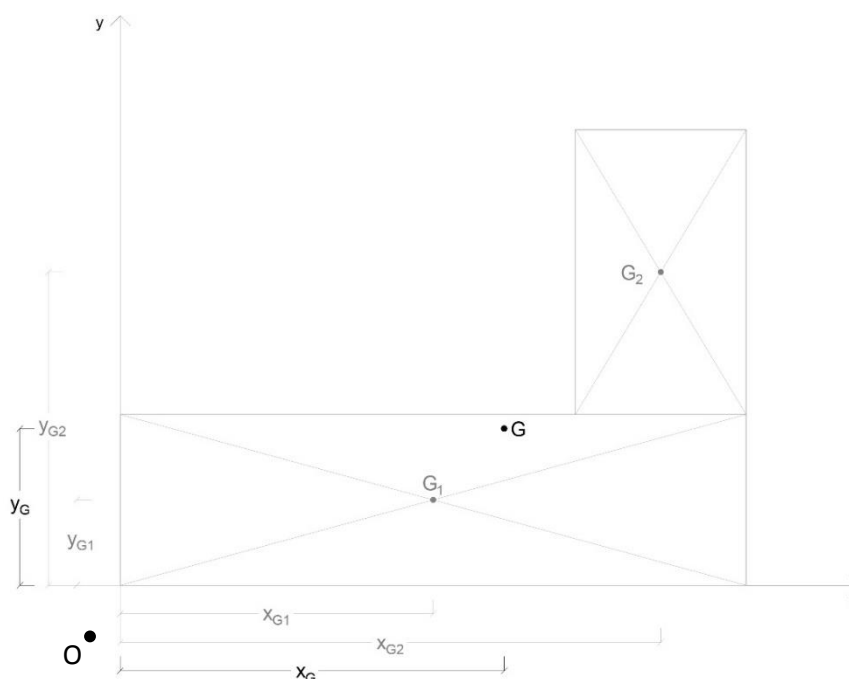


FIG.09

Effettuata quest’operazione, possiamo calcolare le coordinate del centro di massa, che nel caso più generale di un impalcato composto da più di due semplici figure geometriche (nelle formule (6) e (7) è indicato un generico numero naturale n), assumono la seguente espressione:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{Gi}}{A_{tot}} \quad (6)$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{Gi}}{A_{tot}} \quad (7)$$

Nel nostro caso, avendo suddiviso l’impalcato in solo due figure elementari, tali coordinate assumono la semplicissima espressione:

$$x_G = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2}}{A_{tot}} \quad (8)$$

$$y_G = \frac{A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \cdot y_{G2}}{A_{tot}} \quad (9)$$

Le formule (6), (7), (8) e (9), per essere precisi, individuano il centro d'area dell'impalcato e non il centro di massa. I due punti coincidono quando la densità di massa dell'impalcato è uniforme su tutto l'impalcato.

Qualora l'ipotesi di densità uniforme dell'impalcato non fosse valida, il centro di massa dell'impalcato non coinciderebbe con il centro d'area e dovrebbe essere calcolato con le seguenti formule:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \cdot x_{Gi}}{M_{tot}} \quad (10)$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \cdot y_{Gi}}{M_{tot}} \quad (11)$$

Nello **STEP 4** si calcolano: la rigidezza totale orizzontale, somma delle rigidezze dei singoli controventi orizzontali, la rigidezza totale verticale, somma delle rigidezze dei singoli controventi verticali, le coordinate del centro delle rigidezze dell'impalcato e la rigidezza torsionale totale (**FIG.10**).

Step 4: calcolo del centro di rigidezze e delle rigidezze globali		
Ko tot	47680,66	rigidezza totale orizzontale
Kv tot	36914,06	rigidezza totale verticale
X_C (m)	16,67	coordinata X centro rigidezze
Y_C	3,16	coordinata Y centro rigidezze
dd_v1	-16,67	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v2	-6,67	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v3	-0,67	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v4	5,33	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o1	-3,16	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o2	2,84	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o3	12,84	distanze controvento dal centro rigidezze
K φ (KN*m)	2355619,96	rigidezza torsionale totale

FIG.10

Per calcolare il centro di rigidezza è necessario utilizzare le informazioni della tabella sinottica, compilata nello STEP 2; infatti le coordinate del centro di rigidezza, formalmente analoghe alle coordinate del centro di massa, sono:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n k_{vi} \cdot d_{vi}}{k_{v,tot}} \quad (12)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n k_{oi} \cdot d_{oi}}{k_{o,tot}} \quad (13)$$

Nel nostro caso le equazioni (10) ed (11) si particolarizzano come segue:

$$x_C = \frac{k_{v1} \cdot d_{v1} + k_{v2} \cdot d_{v2} + k_{v3} \cdot d_{v3} + k_{v4} \cdot d_{v4}}{k_{v,tot}} \quad (14)$$

$$y_C = \frac{k_{o1} \cdot d_{o1} + k_{o2} \cdot d_{o2} + k_{o3} \cdot d_{o3}}{k_{o,tot}} \quad (15)$$

Ora si possono posizionare il centro di massa ed il centro delle rigidezze all'interno del sistema di riferimento in cui abbiamo disegnato l'impalcato (**FIG.11**), ricordando che ai fini di questa esercitazione, la forza sismica viene applicata nel centro di massa G.

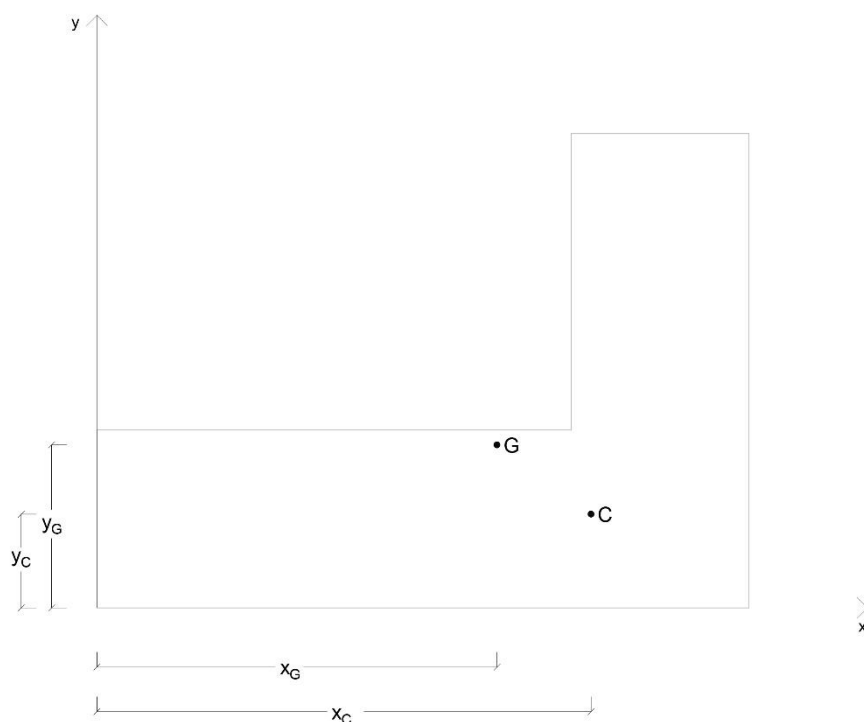


FIG.11

Quest'operazione ci consente di verificare se l'impalcato subisce una rotazione; difatti, nel caso in cui la retta d'azione della forza esterna passi per il centro delle rigidezze, l'impalcato sarebbe soggetto a sola traslazione.

Siccome in termini progettuali la forza nel piano dell'impalcato si ipotizza prima agente in direzione orizzontale e poi agente in direzione verticale, conviene a questo punto ipotizzare una serie di scenari che possano farci prevedere quali siano, caso per caso, i gradi di libertà attivati dalla forza in questione. Questi sono illustrati nelle FIG.12, FIG.13 e FIG.14.

In FIG.12, è illustrato quanto accade quando, il centro di massa e il centro delle rigidezze coincidono, qualunque sia la direzione della forza esterna applicata. Accade cioè che l'impalcato trasla, orizzontalmente o verticalmente a seconda della direzione della forza esterna, ma non ruota.



FIG.12

In FIG.13, è illustrato il caso di forza esterna orizzontale agente su di un impalcato in cui centro di massa e di rigidezza non coincidono: in tal caso, alla traslazione orizzontale si aggiunge la rotazione indotta dal momento prodotto dalla forza esterna rispetto al centro delle rigidezze.

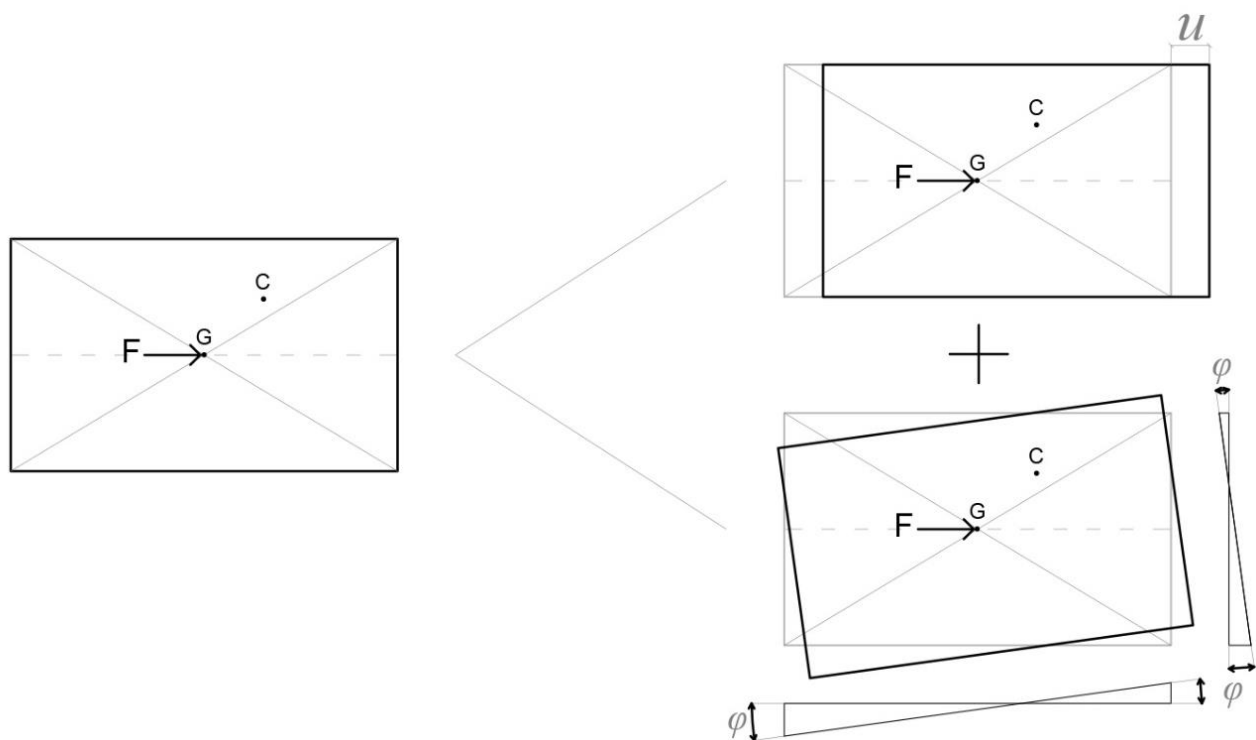


FIG.13

In FIG.14, infine è illustrato il caso di forza esterna verticale agente su di un impalcato in cui centro di massa e di rigidezza non coincidono: in tal caso, alla traslazione verticale si aggiunge la rotazione indotta dal momento prodotto dalla forza esterna rispetto al centro delle rigidezze.

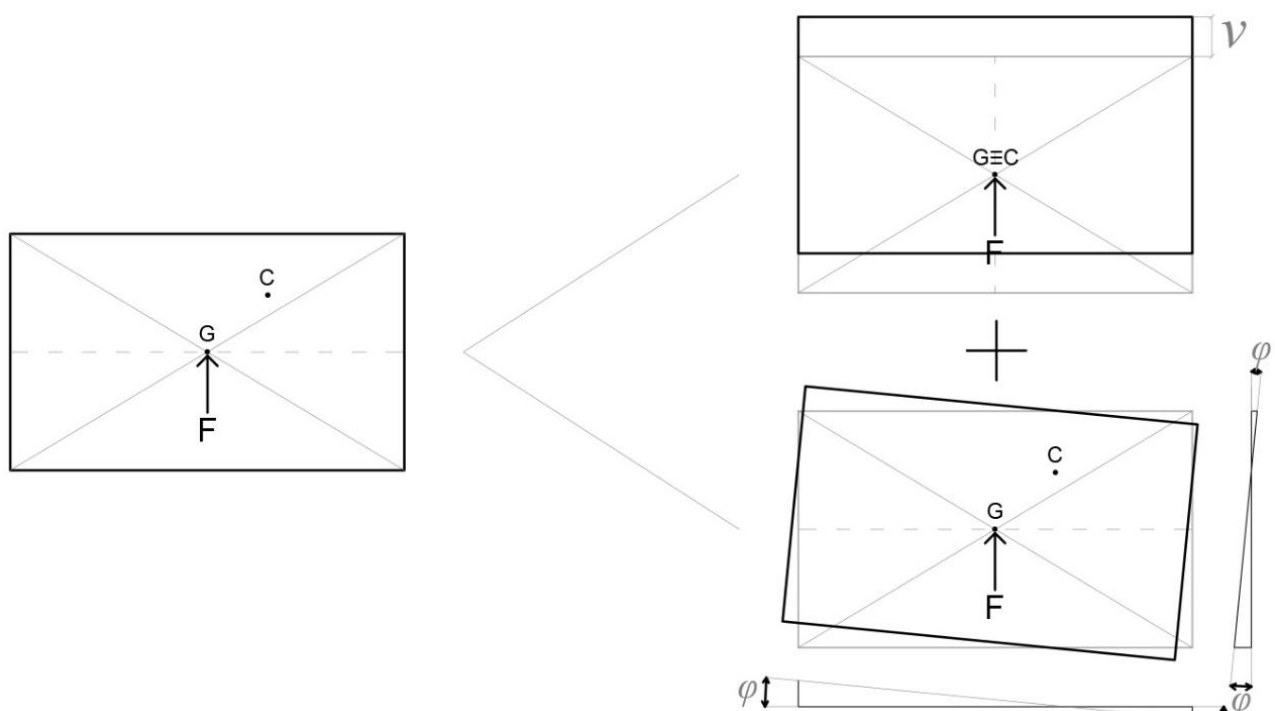


FIG.14

Pertanto, sia il caso della FIG.13 sia il caso della FIG.14 configurano due gradi di libertà effettivamente realizzati dal moto dell'impalcato.

Step 4: calcolo del centro di rigidezze e delle rigidezze globali		
Ko_tot	47680,66	rigidezze totale orizzontale
Kv_tot	36914,06	rigidezze totale verticale
X_C (m)	16,67	coordinata X centro rigidezze
Y_C	3,16	coordinata Y centro rigidezze
dd_v1	-16,67	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v2	-6,67	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v3	-0,67	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_v4	5,33	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o1	-3,16	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o2	2,84	distanze controvento dal centro rigidezze
dd_o3	12,84	distanze controvento dal centro rigidezze
K φ (KN*m)	2355619,96	rigidezze torsionale totale

FIG.15

Nello **STEP 4** oltre a calcolare le coordinate del centro di rigidezze, ricaviamo anche il valore della rigidezze torsionale (FIG.15), calcolando tutte le distanze dei diversi controventi da C ($dd_{v1}, dd_{v2}, \dots, dd_{o1}, \dots$), per poter applicare la formula che segue:

$$k_{\phi} = \sum_i k_{vi} \cdot dd_{vi}^2 + \sum_i k_{oi} \cdot dd_{oi}^2 \quad (16)$$

Nel caso in esame di FIG.1 (e seguenti) si ha:

$$k_{\phi} = k_{v1} \cdot dd_{v1}^2 + k_{v2} \cdot dd_{v2}^2 + k_{v3} \cdot dd_{v3}^2 + k_{v4} \cdot dd_{v4}^2 + k_{o1} \cdot dd_{o1}^2 + k_{o2} \cdot dd_{o2}^2 + k_{o3} \cdot dd_{o3}^2 \quad (17)$$

Nello **STEP 5** si effettua l'analisi dei carichi sismici per ricavare la forza sismica che agisce nel centro di massa (FIG.14).

Step 5: analisi dei carichi sismici		
q_s (KN/mq)	2,50	carico permanente di natura strutturale
q_p	2,50	sovraccarico permanente
q_a	5,00	sovraccarico accidentale
G (KN)	960,00	carico totale permanente
Q (KN)	960,00	carico totale accidentale
ψ	0,80	coefficiente di contemporaneità
W (KN)	1728,00	Pesi sismici
c	0,10	coefficiente di intensità sismica
F (KN)	172,80	Forza sismica orizzontale

FIG.16

Vengono calcolati il carico totale permanente G, e il carico totale accidentale Q, a partire dal valore dei carichi per unità di superficie [kN/mq].

$$G = (q_s + q_p) A_{tot} \quad (18)$$

$$Q = q_a \cdot A_{tot} \quad (19)$$

In accordo con le norme tecniche per le costruzioni (NTC2008), utilizziamo la combinazione sismica per calcolare i pesi sismici.

$$W = G + \psi_{2j} \cdot Q \quad (20)$$

con ψ_{2j} = coefficiente di contemporaneità, il cui valore è indicato nella Tabella 2.5.I della suddetta norma (FIG.15).

Tabella 2.5.1 – Valori dei coefficienti di combinazione

Categoria/Azione variabile	Ψ_{01}	Ψ_{11}	Ψ_{21}
Categoria A Ambienti ad uso residenziale	0,7	0,5	0,3
Categoria B Uffici	0,7	0,5	0,3
Categoria C Ambienti suscettibili di affollamento	0,7	0,7	0,6
Categoria D Ambienti ad uso commerciale	0,7	0,7	0,6
Categoria E Biblioteche, archivi, magazzini e ambienti ad uso industriale	1,0	0,9	0,8
Categoria F Rimesse e parcheggi (per autoveicoli di peso ≤ 30 kN)	0,7	0,7	0,6
Categoria G Rimesse e parcheggi (per autoveicoli di peso > 30 kN)	0,7	0,5	0,3
Categoria H Coperture	0,0	0,0	0,0
Vento	0,6	0,2	0,0
Neve (a quota ≤ 1000 m s.l.m.)	0,5	0,2	0,0
Neve (a quota > 1000 m s.l.m.)	0,7	0,5	0,2
Variazioni termiche	0,6	0,5	0,0

FIG.17

Il peso sismico W , espresso in kN, rappresenta la forza peso dell'edificio, data dal prodotto tra la massa dell'edificio e l'accelerazione di gravità.

Poiché il sisma ha un'accelerazione mediamente più piccola dell'accelerazione di gravità, può essere introdotto un coefficiente di intensità sismica c , che tenga conto della sismicità del luogo di progettazione dell'edificio.

$$F = W \cdot c \quad (21)$$

La FIG.16 riporta i valori del coefficiente di intensità sismica in base alla localizzazione dell'edificio che stiamo analizzando.

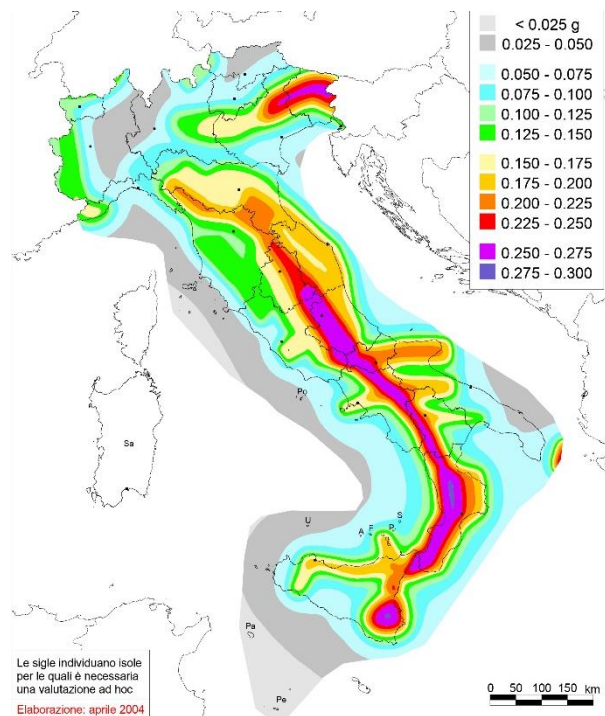


FIG.18

Lo **STEP 6** e lo **STEP 7** sono i passaggi finali e portano a determinare la ripartizione della forza sismica sui controventi e gli effetti cinematici sull'impalcato, in termini di traslazione e di rotazione rigida(FIG.17).

Step 6: ripartizione forza sismica lungo X		
M (KN*m)	-404,13	momento torcente (positivo se antiorario)
u _o (m)	0,004	traslazione orizzontale
φ	-0,00017	rotazione impalcato (positiva se antioraria)
Fv1 (KN)	8,80	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	3,52	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	1,76	Forza sul controvento verticale 3
Fv4	-14,07	Forza sul controvento verticale 4
Fo1	115,35	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	53,08	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	4,37	Forza sul controvento orizzontale 3
		100,34
		61,32
		11,15
Step 7: ripartizione forza sismica lungo Y		
M (KN*M)	-547,20	momento torcente
v _o (KN)	0,005	traslazione verticale
φ	-0,00023	rotazione impalcato
Fv1 (KN)	26,31	Forza sul controvento verticale 1
Fv2	19,16	Forza sul controvento verticale 2
Fv3	74,38	Forza sul controvento verticale 3
Fv4	52,94	Forza sul controvento verticale 4
Fo1	20,33	Forza sul controvento orizzontale 1
Fo2	-11,16	Forza sul controvento orizzontale 2
Fo3	-9,17	Forza sul controvento orizzontale 3
		14,40
		14,40
		72,00
		72,00

FIG.19

Nello STEP 6 si considera che la forza sismica agisca in direzione x; di conseguenza, l'impalcato potrebbe subire una traslazione orizzontale ed una rotazione rigida. Nello STEP 7, la forza sismica viene considerata agente in direzione y e quindi l'impalcato potrebbe subire una traslazione verticale ed una rotazione rigida.

Nella dispensa “*sul concetto di rigidità e sul metodo*” viene illustrato il procedimento che porta a trovare i valori degli spostamenti u , v e φ . Qui riportiamo solo le formule finali che troviamo a pag. 19 della dispensa citata.

Lo spostamento orizzontale, che chiamiamo u , è pari a:

$$u = \frac{F}{k_{o,tot}} \quad (22)$$

Lo spostamento verticale, che chiamiamo v , è uguale a:

$$v = \frac{F}{k_{v,tot}} \quad (23)$$

La rotazione φ impressa all'impalcato si trova con la seguente formula:

$$\varphi = \frac{M}{k_{\varphi}} \quad (24)$$

Una volta che abbiamo determinato il valore dei gradi di libertà, possiamo ricavare la forza sui singoli controventi nei due casi di carico.

Quando la forza è parallela all'asse x (FIG.18), la reazione elastica dei controventi orizzontali sarà:

$$F_{o_n} = k_{o_n}(u + \varphi \cdot dd_{o_n}) \quad (25)$$

mentre in quelli verticali sarà:

$$F_{v_n} = k_{v_n} \cdot \varphi \cdot dd_{v_n} \quad (26)$$

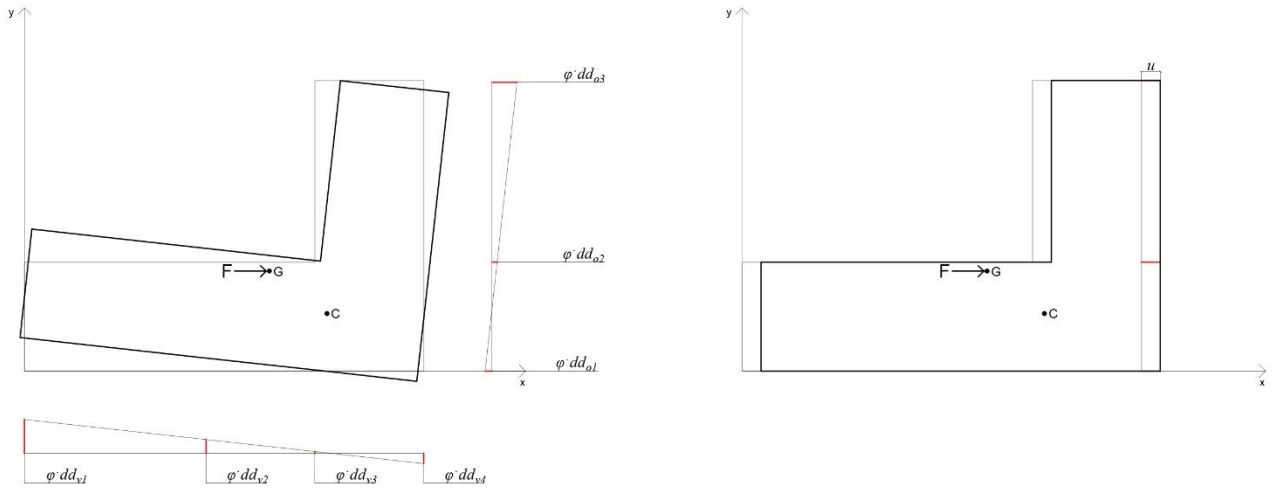


FIG.20

Invece quando la forza è parallela all'asse y (FIG.19), la reazione elastica dei controventi verticali sarà:

$$F_{v_n} = k_{v_n}(v + \varphi \cdot dd_{v_n}) \quad (27)$$

mentre in quelli orizzontali sarà:

$$F_{o_n} = k_{o_n} \cdot \varphi \cdot dd_{o_n} \quad (28)$$

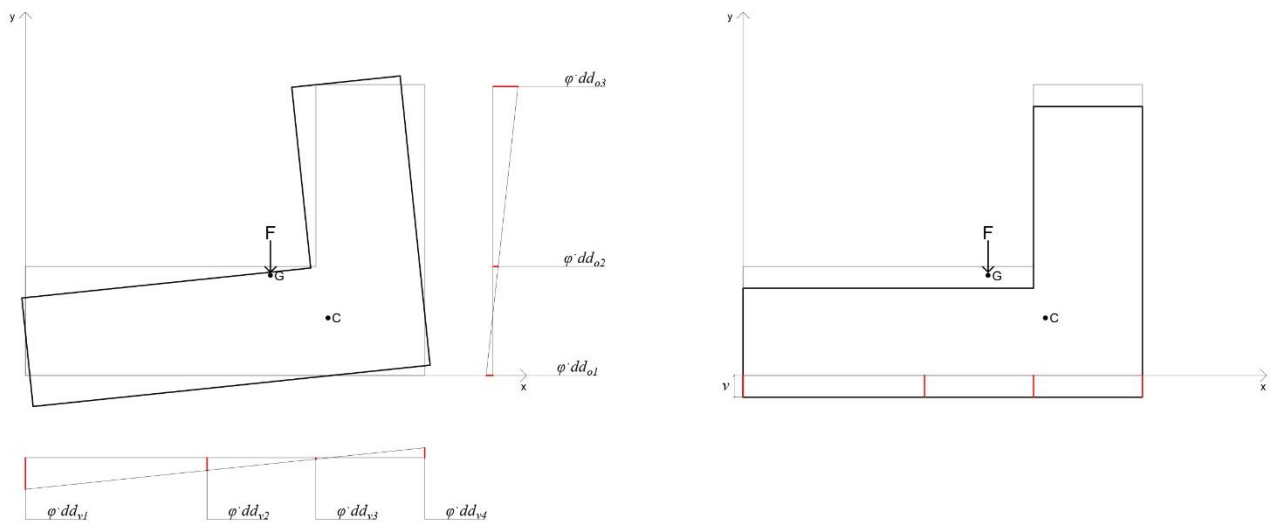


FIG.21